

Was ist eine Relation?

In der Mathematik ist eine **Relation** eine Verbindung zwischen Elementen von zwei (oder mehr) Mengen. Einfach gesagt, eine Relation sagt, wie zwei Dinge zueinander in Beziehung stehen.

Und Relationen können Eigenschaften haben? Welche sind das?

Äquivalenzrelation

Reflexivität

$$\bigwedge a \in A : (a,a) \in R$$

$$a R a$$

$$a \sim a$$

Reflexiv: Jedes Element steht zu sich selbst in Relation.

Reflexivität



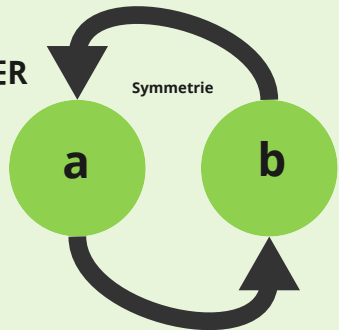
Symmetrie

$$\bigwedge a, b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

$$a R b \Rightarrow b R a$$

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a$$

Symmetrisch: Wenn a zu b in Relation steht, dann steht auch b zu a in Relation.



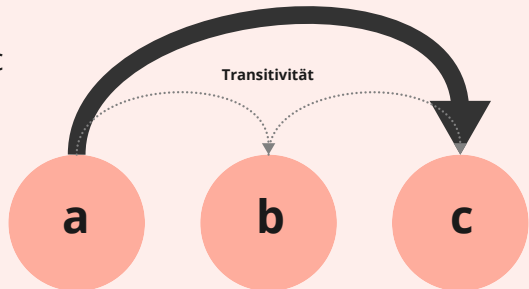
Transitivität

$$\bigwedge a, b, c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

$$a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$$

$$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$$

Transitiv: Wenn a zu b und b zu c in Relation steht, dann steht auch a zu c in Relation.



Antisymmetrie (bzw. *Identivität*)

$$\bigwedge a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

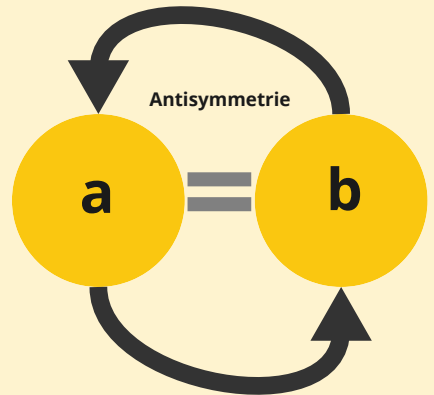
$$a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$$

$$a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow a = b$$

Antisymmetrisch: Dies bedeutet, dass wenn zwei Elemente in beide Richtungen in Relation stehen, sie **gleich sein müssen**.

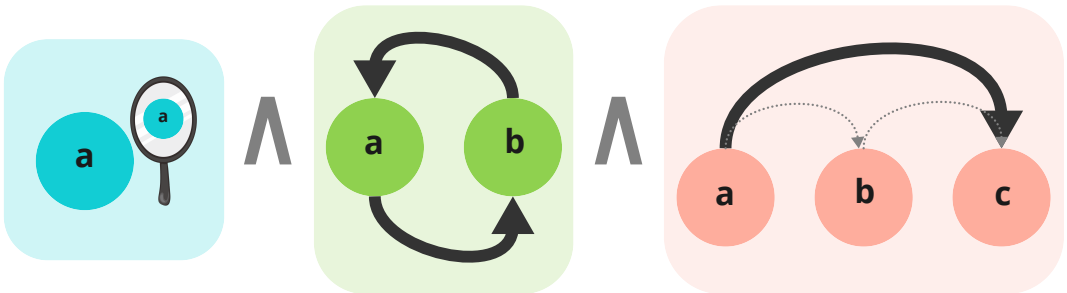
In einfachen Worten:

Wenn a mit b in Relation steht und b mit a in Relation steht, dann muss $a=b$ sein.



Äquivalenzrelation

Eine **Äquivalenzrelation** ist eine spezielle Art von Relation, die drei Eigenschaften hat: sie ist **reflexiv**, **symmetrisch** und **transitiv**.



Äquivalenzklasse

Eine **Äquivalenzklasse** in der Mathematik ist eine Gruppe von Elementen, die durch eine **Äquivalenzrelation** miteinander verbunden sind.

Aufgabe 1

Gegeben sei eine Relation R auf der Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ (der natürlichen Zahlen), definiert durch:

$$a R b :\Leftrightarrow a \cdot b = 24$$

Überprüfe, ob die Relation R folgende Eigenschaften hat:

1. Reflexivität
2. Symmetrie
3. Transitivität
4. Antisymmetrie

Lösung

1 R 24, denn $1 \cdot 24 = 24$ $(1, 24)$

2 R 12, denn $2 \cdot 12 = 24$ $(2, 12)$

3 R 8, denn $3 \cdot 8 = 24$

4 R 6, denn ...

6 R 4

8 R 3

12 R 2

24 R 1

$$R = \{ (1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6), (6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1) \}$$

Reflexiv (a R a) ?

Reflexivität

$$\bigwedge a \in A : (a,a) \in R$$

$$a R a$$



Nein!

Gegenbeispiel:

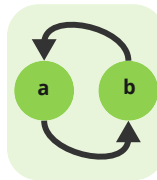
1 ist ein Element von R. Aber es gilt nicht: $1 \cdot 1 = 24$

Symmetrisch (a R b $\Rightarrow$ b R a) ?

Symmetrie

$$\bigwedge a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

$$a R b \Rightarrow b R a$$



Ja!

Begründung:

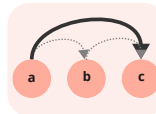
Es gilt stets: $1 \cdot 24 = 24 \cdot 1$
Die Multiplikation ist kommutativ.

Transitiv (a R b $\wedge$ b R c $\Rightarrow$ a R c) ?

Transitivität

$$\bigwedge a,b,c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

$$a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$$



Nein!

Gegenbeispiel:

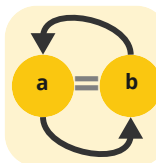
Es gilt $1 \cdot 24 = 24$ und es gilt $24 \cdot 1 = 24$. Aber es gilt nicht $1 \cdot 1 = 24$.

Antisymmetrie (a R b $\wedge$ b R a $\Rightarrow$ a = b) ?

Antisymmetrie

$$\bigwedge a,b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b$$

$$a R b \wedge b R a \Rightarrow a=b$$



Nein!

Gegenbeispiel:

Es gilt $3 \cdot 8 = 8 \cdot 3 = 24$.
Aber es gilt nicht $3 = 8$.

Aufgabe 2

Betrachte die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ und die Relation R , definiert durch:

$a R b \Leftrightarrow a$ ist ein Teiler von b



Überprüfe, ob die Relation R folgende Eigenschaften besitzt:

1. Reflexivität
2. Symmetrie
3. Transitivität
4. Antisymmetrie

Lösung

1 R 1, denn 1 durch 1 ist 1.

1 R 2, denn 2 durch 1 ist 2.

1 R 3, denn 3 durch 1 ist 3

1 R 4, denn 4 durch 1 ist 4.

2 R 2, denn 2 durch 2 ist 1.

2 R 4, denn 4 durch 2 ist 2.

3 R 3, denn 3 durch 3 ist 1.

4 R 4, denn 4 durch 4 ist 1.

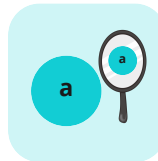
$$R = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4) \}$$

Reflexiv (a R a) ?

Reflexivität

$$\bigwedge a \in A : (a,a) \in R$$

$a R a$



Ja!

Begründung:

Jede Zahl ist Teiler von sich selbst.

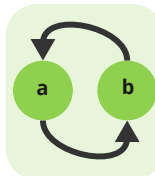
$(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$

Symmetrisch (a R b $\Rightarrow$ b R a) ?

Symmetrie

$$\bigwedge a, b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

$a R b \Rightarrow b R a$



Nein!

Gegenbeispiel:

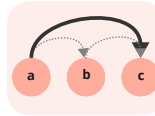
Z.B. ist 1 ein Teiler von 2, aber 2 ist kein Teiler von 1. Denn die Division ist nicht kommutativ.

Transitiv (a R b $\wedge$ b R c $\Rightarrow$ a R c) ?

Transitivität

$$\bigwedge a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

$$a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$$



Ja!

Begründung:

Genau dann, wenn $a | b$ und $b | c$, so ist auch $a | c$... aber dies müssen wir beweisen...

Beweis der Transitivität im Allgemeinen

$$a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$$

$$a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$$

Voraussetzung $a | b \wedge b | c$

Behauptung $a | c \quad c = a \cdot n$

Beweisführung

$$\bigwedge a, b \in \mathbb{N} : a | b : \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : b = a \cdot k$$

$$\bigwedge b, c \in \mathbb{N} : b | c : \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : c = b \cdot m$$

$$b = a \cdot k$$

$$c = b \cdot m$$

Wir substituieren b mit ak.

$$c = b \cdot m = a \cdot k \cdot m$$

Wir setzen Klammern (Assoziativgesetz)

$$c = a \cdot (k \cdot m)$$

$$\bigwedge k, m \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} : x = k \cdot m$$

$$c = a \cdot x$$

c ist ein Vielfaches von a, demnach ist a aufgrund der Vielfacheneigenschaft der Teilerrelation ein Teiler von c.

$$\Rightarrow a | c \quad \blacksquare$$

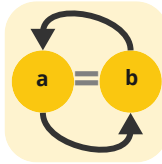


Antisymmetrie ($a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$) ?

Antisymmetrie

$$\bigwedge a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

$$a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b$$



Ja!

Begründung:

Wenn $a \mid b$ und $b \mid a$, so gilt stets auch $a = b$. Wir sehen das in den Tupeln: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)

Aber wir müssen das beweisen...

Beweis der Antisymmetrie im Allgemeinen

Voraussetzung $a \mid b \wedge b \mid a$

Behauptung $a = b$

Beweisführung $\bigwedge a, b \in \mathbb{N} : a \mid b \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : b = a \cdot k$
 $\bigwedge a, b \in \mathbb{N} : b \mid a \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : a = b \cdot m$

$$b = a \cdot k$$

$$a = b \cdot m$$

Wir substituieren b mit ak.

$$a = b \cdot m = a \cdot k \cdot m$$

$$a = a \cdot k \cdot m$$

Wir setzen Klammern (Assoziativgesetz)

$$a = a \cdot (k \cdot m) \quad | : a$$

$$1 = k \cdot m$$

Okay moment, $a = a \cdot k \cdot n$??? Für welche natürliche Zahl k und für welche natürliche Zahl n wäre das eine richtige Gleichung? Genau! Nur für $k = n = 1$. Oder auch: Die einzigen Faktoren der natürlichen Zahlen, die im Produkt 1 ergeben, sind jeweils 1. Also gilt $k = n = 1$

Wenn $k = n = 1$ ist, dann gilt das doch auch für die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} b = a \cdot k = a \cdot 1 = a \\ a = b \cdot m = b \cdot 1 = b \end{array} \right\} \underline{\underline{a = b}} \quad \blacksquare$$

