

## Vereinigung ( $\cup$ ), Durchschnitt ( $\cap$ ) und Differenz ( $\setminus$ )

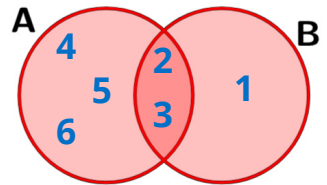
$A = \{2,3,4,5,6\}$  und  $B = \{1,2,3\}$

### Vereinigungsmenge ( $A \cup B$ )

Logische Operation: Disjunktion  $A \vee B \sim$  "ODER"

Die Vereinigung von A und B enthält definitionsgemäß alle Elemente x, für die folgendes gilt: x ist ein Element von A **ODER** x ist ein Element von B.

$$\cup \{A, B\} := \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\} =: A \cup B$$



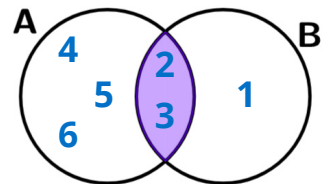
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

### Schnittmenge ( $A \cap B$ )

Logische Operation: Konjunktion  $A \wedge B \sim$  "UND"

Der Durchschnitt von A und B enthält definitionsgemäß alle Elemente x, für die folgendes gilt: x ist ein Element von A **UND** x ist ein Element von B.

$$\cap \{A, B\} := \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\} =: A \cap B$$



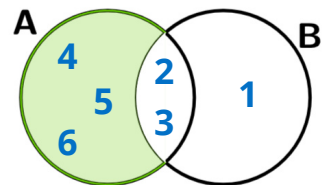
$$A \cap B = \{2, 3\}$$

### Differenzmenge ( $A \setminus B$ )

Logische Operation:  $A \wedge \neg B$

Die Differenzmenge A ohne B enthält definitionsgemäß alle Elemente x, für die folgendes gilt: x ist ein Element aus A **UND** x ist kein Element aus B:

$$\setminus \{A, B\} := \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\} =: A \setminus B$$

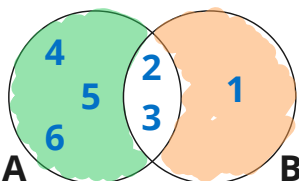


$$A \setminus B = \{4, 5, 6\}$$

$$B \setminus A = \{1\}$$

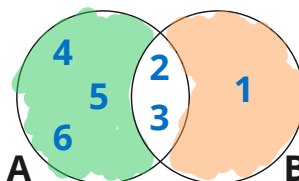
### Eine kleine Übung...

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 4, 5, 6\}$$



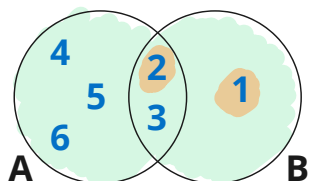
A

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \{\} = \emptyset$$



A

$$(A \cup B) \setminus \{1, 2\} = \{3, 4, 5, 6\}$$



A

## Teilmenge ( $\subseteq$ ) und echte Teilmenge ( $\subset$ )

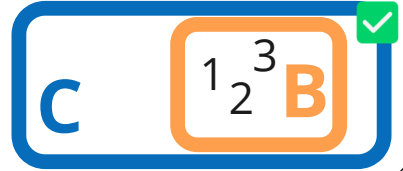
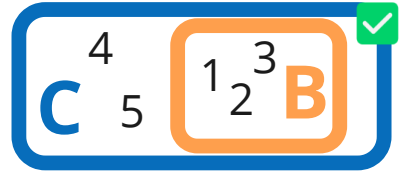
$B = \{1,2,3\}$  und  $C = \{1,2,3,4,5\}$

### Teilmenge ( $\subseteq$ )

"Wenn ein Element in B ist, dann ist es auch in C."

Eine Teilmenge ist eine Menge, deren **Elemente (alle)** auch in einer anderen Menge enthalten sind. Das heißt, wenn jede Zahl oder jedes Objekt in der kleineren Menge auch in der größeren Menge ist, dann ist die kleinere Menge eine Teilmenge.

$$B \subseteq C : \Leftrightarrow \bigwedge x : (x \in B) \Rightarrow (x \in C)$$

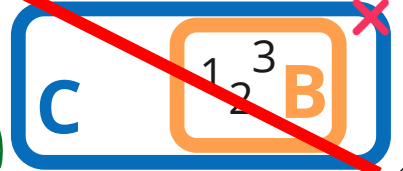
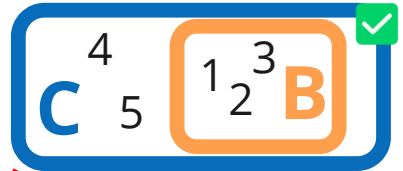


### Echte Teilmenge ( $\subset$ )

"Alle Elemente von B sind in C, **aber C** enthält **mindestens ein weiteres Element**, das nicht in B ist."

Eine **echte Teilmenge** ist fast das Gleiche, aber mit einem wichtigen Unterschied: Die kleinere Menge darf nicht genau gleich sein wie die größere Menge. Es muss mindestens ein Element in der größeren Menge sein, das nicht in der kleineren Menge enthalten ist.

$$B \subset C : \Leftrightarrow B \subseteq C \wedge \bigvee (x \in C) \wedge (x \notin B)$$



## Eine kleine Übung...

$D = \{1\}$  und  $E = \{1,2\}$

$F = \{1,2\}$  und  $G = \{2,3,7\}$

$H = \{8,9,11,12\}$  und  $K = \{8,9,11,12\}$

$D \subseteq E$  

$F \subseteq G$  

$H \subseteq K$  

$D \subset E$  

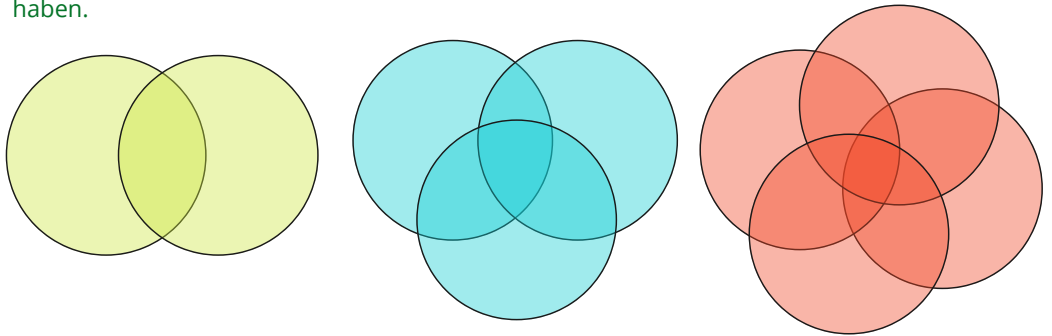
$F \subset G$  

$H \subset K$  

## Venn-Diagramme

### Definition

Ein **Venn-Diagramm** ist eine grafische Darstellung, die zeigt, wie verschiedene Mengen (Gruppen) von Objekten oder Zahlen miteinander in Beziehung stehen. Es besteht aus Kreisen, die sich teilweise überlappen. Jeder Kreis repräsentiert eine Menge. Die Überlappungen zwischen den Kreisen zeigen, welche Elemente die Gruppen gemeinsam haben.



### Eine kleine Übung...

Bestimmen Sie die Mengen A, B und C durch folgende Informationen und geben Sie die Mengen Elementweise an. Geben Sie die Menge A zusätzlich in einer erzeugenden Darstellung an.

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$(a, b, c, d, e, f, g)$$

$$A \cap B = \{2, 3, 6\}$$

$$(a, d)$$

$$A \cap C = \{2, 3, 4\}$$

$$(a, b)$$

$$A \cap B \cap C = \{\}$$

$$(e)$$

$$C \setminus (A \cup B) = \{8, 9, 1\}$$

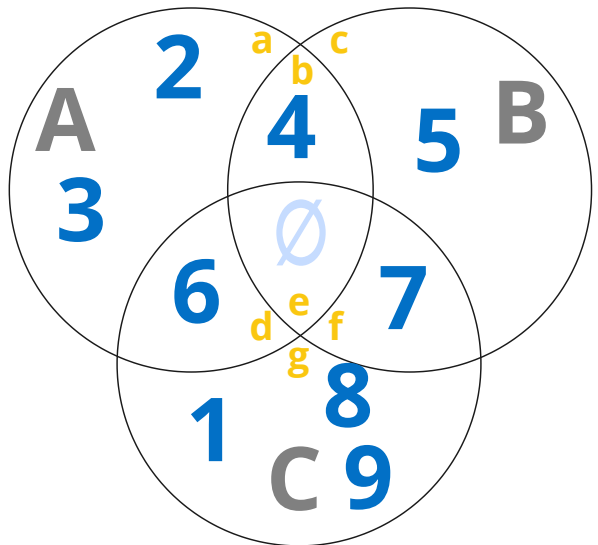
$$(g)$$

$$A \cap C = \{6\}$$

$$(d, e)$$

$$B \cap C = \{7\}$$

$$(e, f)$$



### Lösung der Aufgabe, Mengenangaben:

$$A = \{2, 3, 4, 6\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{5\} \wedge 1 < x < 7\}$$

$$B = \{4, 5, 7\}$$

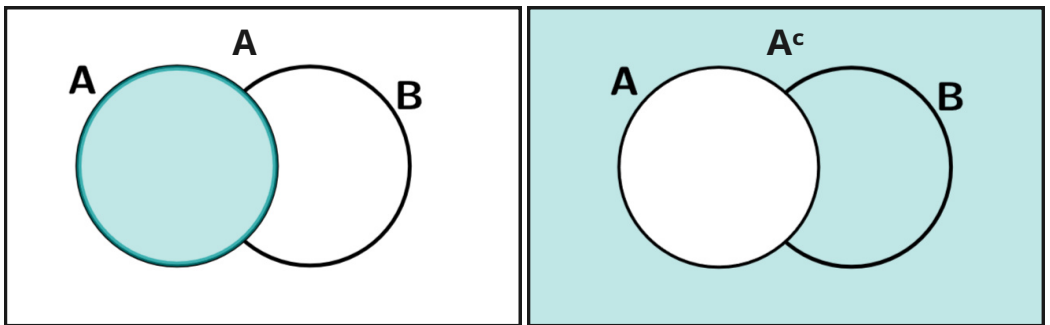
$$C = \{1, 6, 7, 8, 9\}$$

**Komplementmenge (absolutes Komplement)****Definition**

Die Komplementmenge einer Menge A enthält alle Elemente, die einer Teilmenge (hier Menge A) fehlen, damit sie die gleichen Elemente besitzt wie die Grundmenge.

**Was ist eine Grundmenge?**

Stell dir vor, du hast eine Kiste mit Spielzeugautos. Wenn jemand fragt, welche Autos in der Kiste sind, dann sind alle Autos in der Kiste deine **Grundmenge**. Wenn du dann nur mit roten Autos spielen willst, wählst du aus der Grundmenge (der Kiste) nur die roten aus.

**Eine kleine Übung...**

Grundmenge =  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$

Menge  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Komplementmenge  $A^c = \{0, 1\} \cup \{7, 8, 9, 10, \dots\}$

Was bemerken wir? Die Vereinigung von der Menge A und ihrer Komplementmenge ergibt die Grundmenge.

$$A \cup A^c = \mathbb{N}$$

**Noch eine kleine Übung...**

Grundmenge =  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Menge  $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

Komplementmenge  $C^c = \{0, 1, 2, 3\}$

Grundmenge =  $D = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$

Menge  $E = \mathbb{N}$

Komplementmenge  $E^c = \{\}$

**Potenzmenge****Definition**

Die Potenzmenge der Menge A enthält definitionsgemäß alle Mengen U, für die folgendes gilt: U ist eine Teilmenge von A.

$$\mathcal{P}(A) := \{ U : (U \subseteq A) \}$$

**Merksatz**

Die **POTENZ**menge ist die Menge aller **POTENZ**iellen Teilmengen einer Menge, einschließlich der leeren Menge und sich selbst.

**Ein kleines Beispiel...**

$$C = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(C) = \left\{ \begin{array}{llll} \{\} = \emptyset, & \{1\}, \{2\}, \{3\}, & \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, & \{1,2,3\} \end{array} \right\}$$

Leere Menge      Einer-Mengen      Zweier-Mengen      Dreier-Mengen

Was mache ich, wenn ich unsicher bin, ob die Potenzmenge, die ich aufgeschrieben habe, wirklich alle Teilmengen enthält?

**Dies lässt sich mit folgendem "Trick" herausfinden!**

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{|C|} = 2^3 = 8 \quad \mathcal{P}(C) \text{ enthält genau 8 Elemente.}$$

Die Striche bedeuten, dass wir die **Mächtigkeit oder Kardinalität** einer Menge betrachten. Das bedeutet nichts anderes als die Anzahl der Elemente innerhalb der Menge.

**Kartesisches Produkt oder auch Kreuzprodukt****Definition**

Das kartesische Produkt zweier Mengen ist die Menge aller geordneten Paare (Tupel  $\sim (x,y)$ ) von Elementen der beiden Mengen, wobei die erste Komponente ein Element der ersten Menge und die zweite Komponente ein Element der zweiten Menge ist.

$$A \times B := \{ (a,b) : (a \in A) \wedge (b \in B) \}$$

**Ein kleines Beispiel...**

Mengen  $B = \{2,3,4,5,6\}$   
 $C = \{1,2,3\}$   
 $E = B \setminus \{2,6\} = \{3,4,5\}$

Kreuzprodukt  $C \times E = \{1,2,3\} \times \{3,4,5\} = \{ (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5) \}$   
 $D \times F = \{a,b\} \times \{c,d,e\} = \{ (a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e) \}$

| <b>E</b> \ <b>C</b> | <b>1</b>     | <b>2</b>     | <b>3</b>     |
|---------------------|--------------|--------------|--------------|
| <b>3</b>            | <b>(1,3)</b> | <b>(2,3)</b> | <b>(3,3)</b> |
| <b>4</b>            | <b>(1,4)</b> | <b>(2,4)</b> | <b>(3,4)</b> |
| <b>5</b>            | <b>(1,5)</b> | <b>(2,5)</b> | <b>(3,5)</b> |