Was ist eine Menge oder was sind Mengen überhaupt?

Definition

Als Menge wird in der Mathematik ein **abstraktes Objekt** bezeichnet, das aus der Zusammenfassung einer Anzahl einzelner Objekte hervorgeht. Diese werden dann als die **Elemente** der Menge bezeichnet. Die Menge ist eines der wichtigsten und grundlegendsten Konzepte der Mathematik; mit ihrer Betrachtung beschäftigt sich die Mengenlehre.

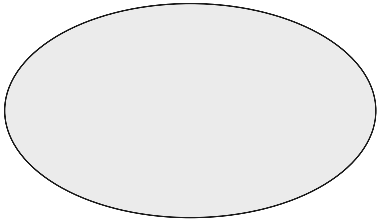
Beispiele für Mengen

$A = \{1, 3, 5, 6, x, \text{Blau}\}$

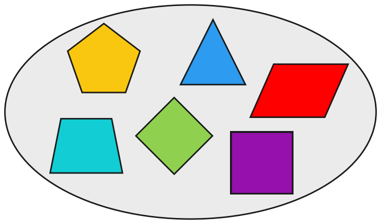
$B = \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, \ldots, 6\}$

$C = \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$

$D = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$



Darstellung der leeren Menge



Darstellung einer Menge mit Vielecken

Eigenschaften von Mengen

- Es ist egal, wie häufig ein Element innerhalb einer Menge vorkommt. Entscheidend ist nur, kommt es in der Menge vor, oder kommt es nicht vor.

$C = \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \boxed{\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}}$

$1 \in C$

$-3 \notin C$

- Die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Menge ist ebenfalls egal.

$C = \boxed{\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$

- Darüber hinaus können Mengen endlich oder unendlich sein.

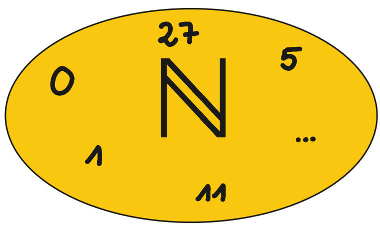
$C = \{1, 2, 3\}$ Menge C besitzt eine endliche Anzahl an Elementen; sie ist endlich.

$D = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge D besitzt eine unendliche Anzahl an Elementen; sie ist unendlich.

Die Menge D kommt mir aber sehr bekannt vor...

$D = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$



Die Menge der natürlichen Zahlen umfasst alle **"zählbaren" Zahlen** ab. Aus der **Addition und Multiplikation** von nat. Zahlen gehen stets nat. Zahlen hervor.

Was heißt denn bitte elementweise und erzeugende Darstellung?

Gebe die folgenden Mengen elementweise und erzeugend an:

Die Menge A, die ein Vielfaches von 4 ist und kleiner als 21.

Elementweise Darstellung $A = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$

Erzeugende Darstellung $A = \{n \in \mathbb{N} : 4 \mid n \wedge n < 21\}$

Und was heißt Teilermenge und Vielfachmenge?

Teilermengen

Definition

Die Teilermenge einer natürlichen Zahl n ist die Menge aller Teiler dieser Zahl. Sie besteht also aus allen natürlichen Zahlen, durch die man die Ausgangszahl n ohne Rest teilen kann, und wird oft mit Tn oder T(n) bezeichnet.

$T(n) = \{t \in \mathbb{N}^* : t \mid n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

"Die Teilermenge von n enthält alle natürlichen Zahlen t, die darüber hinaus Teiler von n sind."

Natürliche Zahl $n = 12$

Teilermenge von n $T(n) = T(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$T(9) = \{1, 3, 9\}$

Vielfachmengen

Die **Vielfachenmenge** ist in der Mathematik die Menge aller Vielfachen einer natürlichen Zahl. Sie besteht aus allen natürlichen Zahlen, die durch die Ausgangszahl ohne Rest teilbar sind.

$V(n) = \{v \in \mathbb{N} : n \mid v\}$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$

"Die Vielfachmenge von n enthält alle natürlichen Zahlen, für die gilt: n ist ein Teiler von v."

Natürliche Zahl $n = 3$

Vielfachmenge von n $V(n) = V(3) = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$

Teilerdefinition

$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{N}} : \boxed{a \mid b} :\Leftrightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} : \boxed{b = a \cdot n}$

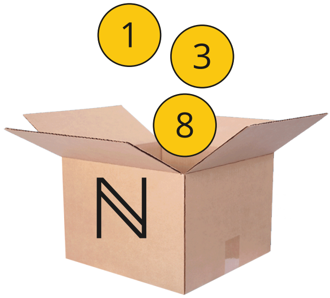
"Für alle a,b der natürlichen Zahlen gilt, a teilt b definitionsgemäß genau dann wenn es mindestens eine Zahl n der natürlichen Zahlen gibt, für die folgendes gilt: b ist das Produkt aus a und n, bzw. b ist ein n-faches von a."

Einfach gesagt: "Wenn a ein Teiler von b ist, genau dann ist b ein Vielfaches von a."

$\boxed{3 \mid 12} :\Leftrightarrow \boxed{12 = 3 \cdot 4}$

Gebe die folgenden Mengen elementweise an:

a) A = {n ∈ ℕ: 7 | n}
b) B = {n ∈ ℕ: n | 36}
c) C = {n ∈ ℕ: 8 | n ∧ n<35}
d) D = "Alle nat. Zahlen, die beim Teilen durch 5 den Rest 2 lassen."
e) E = {x ∈ ℤ: |x+2| > 6}



a) n ∈ ℕ: 7 | n

$\frac{1}{7}$

A = {0, 7, 14, 21, ...} = V(7) "Vielfachmenge von 7, also V(7)"

Die Menge A ist **unendlich**.

b) n ∈ ℕ: n | 36

$\frac{36}{1}$

B = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} = T(36) "Teilermenge von 36, also T(36)"

Die Menge B ist **endlich**.

c) n ∈ ℕ: 8|n ∧ n<35

$\frac{0}{8}$ 0 **< 35**

C = {0, 8, 16, 24, 32}

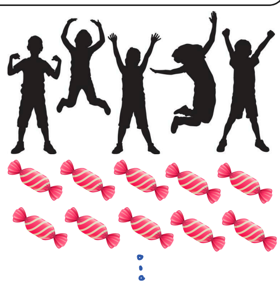
Die Menge C ist **endlich**.

d) D = "Alle nat. Zahlen, die beim Teilen durch 5 den Rest 2 lassen."

n ∈ ℕ: n = 5k+2 mit k ∈ ℕ

n = 5 • $\boxed{0}$ + 2

+2



k • {0, 1, 2, ...}

D = {2, 7, 12, 17, ...}

Die Menge D ist **unendlich**.

e) $x \in \mathbb{Z}$: $|x+2| > 6$

1. Was ist dieses $\mathbb{Z}$?
2. Und was bedeuten denn überhaupt diese Striche da?

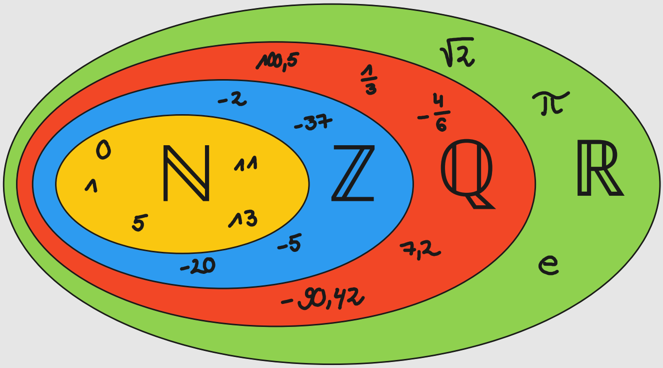
1.

$\mathbb{N}$ ~ **Natürlichen Zahlen**

$\mathbb{Z}$ ~ **Ganzen Zahlen**

$\mathbb{Q}$ ~ **Rationalen Zahlen**

$\mathbb{R}$ ~ **Reellen Zahlen**

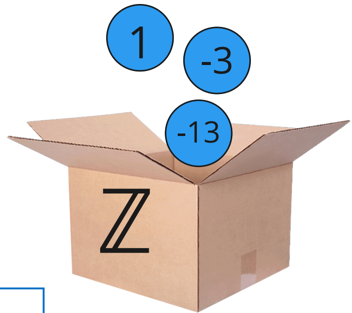


2. Betragsstriche: $|x| = |-x| = x$

$|2| = |-2| = 2$

$|+(x+2)| > 6$

$|-(x+2)| > 6$



$x \in \mathbb{Z}$: $|x+2| > 6$

$+(x+2) > 6$	$-(x+2) > 6$
$x + 2 - 2 > 6 - 2 \quad \vert -2$	$-x - 2 + 2 > 6 + 2 \quad \vert +2$
$x > 4$	$-x + x - 8 > 8 + x - 8 \quad \vert +x-8$
	$-8 > x \Rightarrow x < -8$

$E = \{\dots, -11, -10, -9, 5, 6, 7, \dots\}$

Die Menge E ist **unendlich**.

$|5+2| = |7| = 7 > 6$

$|4+2| = |6| = 6 \not> 6$

$|-9+2| = |-7| = 7 > 6$