Thema: **Live-Meeting 05: Lineare Funktionen**

Datum: 09.11.2024

Mengen, Relationen, usw... jetzt noch Funktionen?? Was ist denn eine Funktion genau?

Definition

Eine **Funktion** ist eine **Relation** zwischen zwei **Mengen**, die jeder Eingabe in der ersten Menge (oft als *Definitionsmenge* oder *Menge der Argumente* bezeichnet) genau eine Ausgabe in der zweiten Menge (oft als *Wertebereich* oder *Zielmenge*) zuordnet.

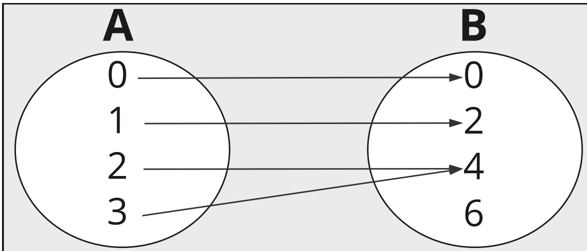
Formal bedeutet dies:

Eine **Funktion** f von einer Menge A zu einer Menge B ist eine **Relation**, die jedem Element a∈A **genau ein** Element b∈B zuordnet. Man schreibt dies als **f : A→B ∧ f(a)=b**.

Injektivität ~ Keine zwei Elemente in A zeigen auf dasselbe Element in B.

Surjektivität ~ Jedes Element in B wird durch ein oder mehrere Elemente in A erreicht.

Bijektivität ~ Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

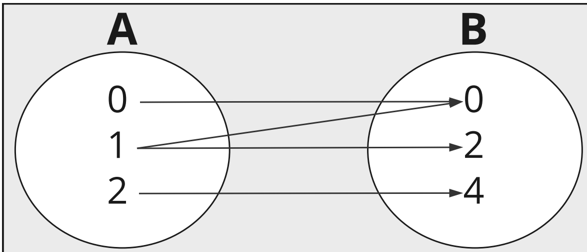


Ist das eine Funktion?

Ja [x] Nein [ ]

Eindeutig [x] Injektiv [ ]

Eineindeutig [ ] Surjektiv [ ]

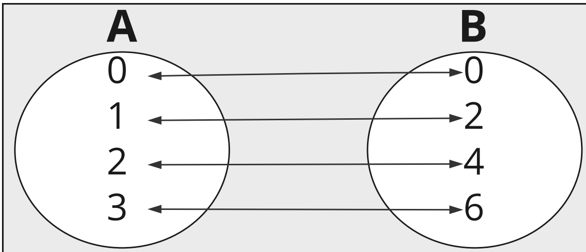


Ist das eine Funktion?

Ja [ ] Nein [x]

Eindeutig [ ] Injektiv [ ]

Eineindeutig [ ] Surjektiv [ ]

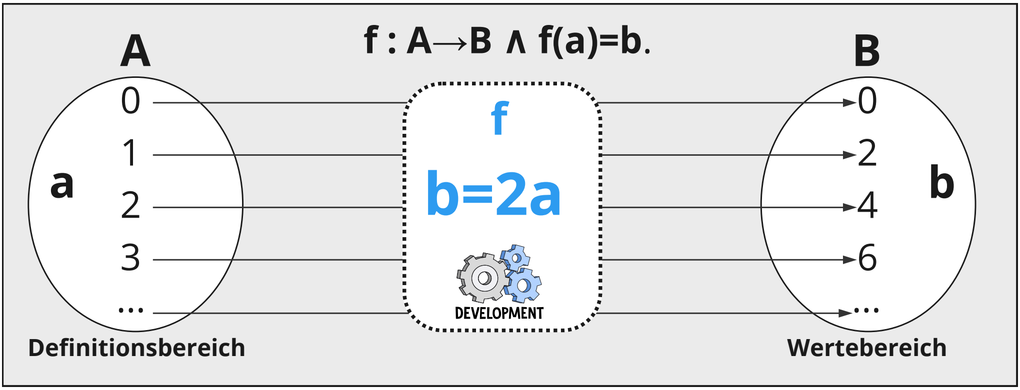


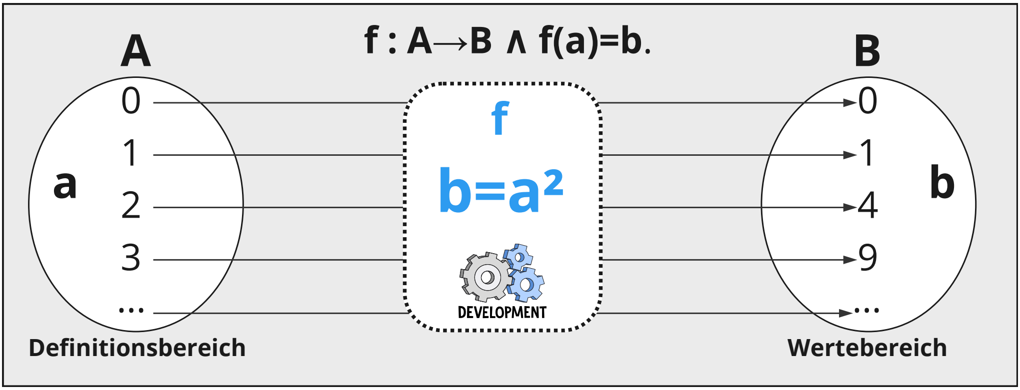
Ist das eine Funktion?

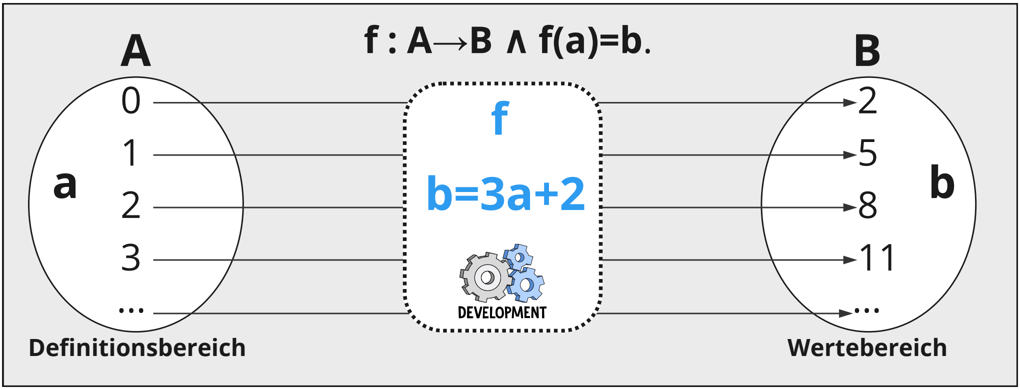
Ja [x] Nein [ ]

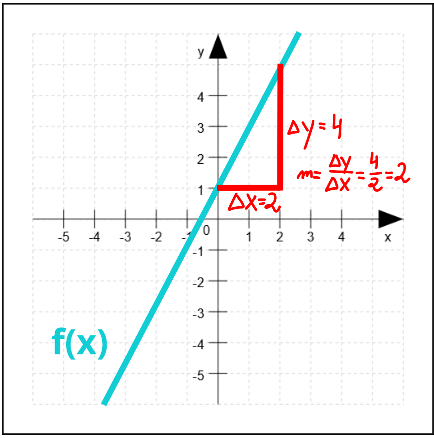
Eindeutig [x] Injektiv [x]

Eineindeutig [x] Surjektiv [x]


f : A→B ∧ f(a)=b.
A
B
0
1
2
3
...
a
f
b=2a
DEVELOPMENT
0
2
4
6
...
b
Definitionsbereich
Wertebereich


f : A→B ∧ f(a)=b.
A
B
0
1
2
3
...
a
f
b=a²
DEVELOPMENT
0
1
4
9
...
b
Definitionsbereich
Wertebereich


f : A→B ∧ f(a)=b.
A
B
0
1
2
3
...
a
f
b=3a+2
DEVELOPMENT
2
5
8
11
...
b
Definitionsbereich
Wertebereich



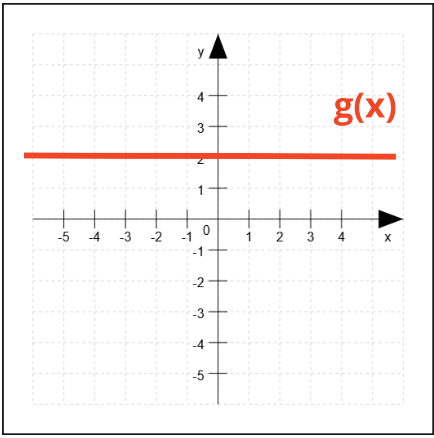
Ist das eine Funktion?

Ja [X] Nein [ ]

Schnittpunkt mit der y-Achse: b=1

Steigung: m=2

Funktionsgleichung: $f(x) = mx + b = 2x + 1$



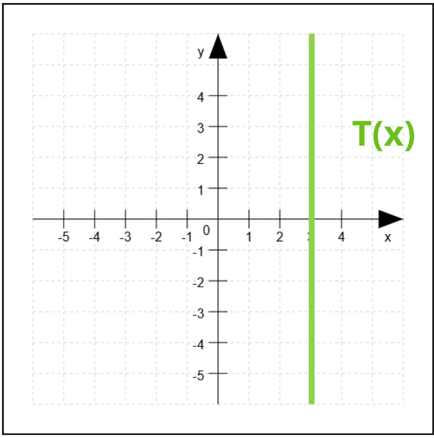
Ist das eine Funktion?

Ja [X] Nein [ ]

Schnittpunkt mit der y-Achse: b=2

Steigung: m=0

Funktionsgleichung: $g(x) = mx + b = 2$



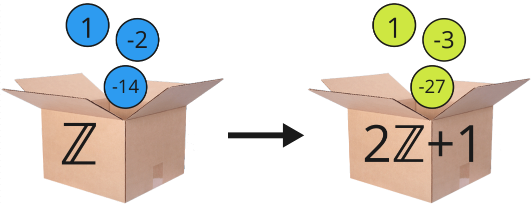
Ist das eine Funktion?

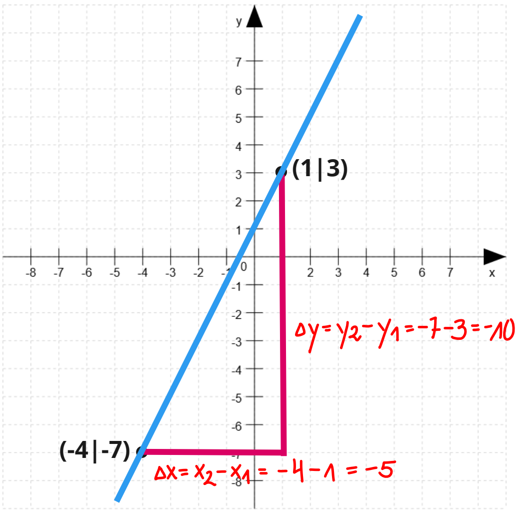
Ja [ ] Nein [X]

Schnittpunkt mit der y-Achse:

Steigung:

Funktionsgleichung:





D(f) = ℤ

W(f) = 2ℤ+1

f(x) = y = 2x+1

f : ℤ→2ℤ+1 ∧ f(x) = y = 2x+1

Aufgaben

(a) Bestimmen Sie die lineare Funktionsgleichung **f(x)**, deren Graph durch die Punkte **(1|3)** und **(-4|-7)** verläuft.

(b) Zeichen Sie ein passendes **Steigungsdreieck**.

(c) Bestimmen Sie die Nullstelle (Schnittpunkt mit der x-Achse) von **f(x)**.

(d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der Funktion **g(x) = -0,5x+5**.

(e) Geben Sie eine lineare Funktion h(x) an, deren Graph f(x) **nicht** schneidet.

(a) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7-3}{-4-1} = \frac{-10}{-5} = \frac{10}{5} = 2$

$= \frac{3-(-7)}{1-(-4)} = \frac{10}{5} = 2$

Die Steigung beträgt m=2. Diesen Wert tragen wir in die allgemeine Funktionsgleichung ein.

$$f(x) = y = mx + b$$
$$y = 2x + b$$

Um b zu ermitteln, setzen wir einen gegebenen Punkt ein, hier z.B. (1|3) und können dann b ausrechnen.

x y

$$3 = 2 \cdot 1 + b$$
$$3 = 2 + b \quad | -2$$
$$1 = b \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2x + 1$$

(c) **Erklärung zur Nullstelle:** Um die Nullstelle zu bestimmen, setzen wir y=0.

$$f(x) = y = 2x + 1$$
$$0 = 2x + 1 \quad | -1$$
$$-1 = 2x \quad | :2$$
$$-\frac{1}{2} = x$$
$$\Rightarrow S_x\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$$

(d) **Erklärung zum Schnittpunkt zweier Funktionen:** Um den Schnittpunkt zweier Funktionen zu bestimmen, setzen wir die beiden Funktionen gleich. Das bedeutet, wir suchen nach dem x-Wert, an dem beide Funktionen denselben Funktionswert y besitzen. Anschließend setzen wir den ermittelten x-Wert in eine der beiden Funktionen ein, um den y-Wert zu berechnen.

$$f(x) = g(x)$$
$$2x + 1 + 0{,}5x = -0{,}5x + 5 + 0{,}5x \quad | +0{,}5x$$
$$2{,}5x + 1 - 1 = 5 - 1 \quad | -1$$
$$2{,}5x = 4 \quad | \; 2{,}5 = 2 + 0{,}5 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{2{,}5}{1} x = 4$$
$$\frac{25}{10} x = 4$$
$$\frac{5}{2} \cdot x = 4 \quad | :\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \cdot\left(\frac{2}{5}\right)$$
$$x = 4 \cdot \frac{2}{5}$$
$$x = \frac{8}{5}$$

Anschließend setzen wir den ermittelten x-Wert in eine der beiden Funktionen ein, um den y-Wert zu berechnen.

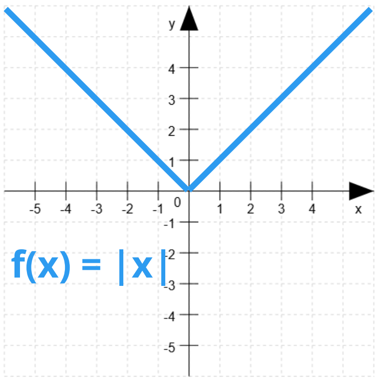
$$f\left(x = \frac{8}{5}\right) = y = 2 \cdot \frac{8}{5} + 1 = \frac{16}{5} + 1 = \frac{16}{5} + \frac{5}{5} = \frac{21}{5}$$

Schnittpunkt von f und g liegt bei: $\left(\frac{8}{5}; \frac{21}{5}\right)$

$$\frac{8}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = 1 + 0{,}6 = 1{,}6$$
$$\frac{21}{5} = \frac{20}{5} + \frac{1}{5} = 4 + 0{,}2 = 4{,}2$$

Schnittpunkt von f und g liegt bei: $(1{,}6; 4{,}2)$

(e) $h(x) = y = 2x + b \quad , b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 1$



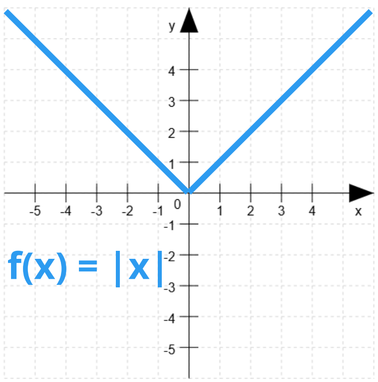
A = $\mathbb{Z}$

B = $\mathbb{Z}$

Eindeutig ☒ Injektiv ☐

Eineindeutig ☐ Surjektiv ☐ Bijektiv ☐

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \wedge f(x) = |x|.$



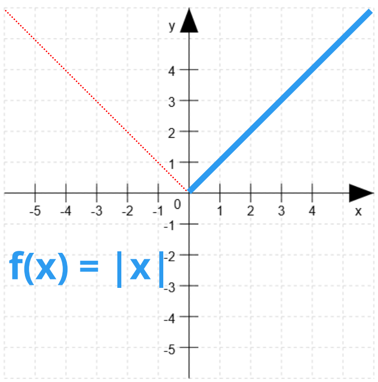
A = $\mathbb{Z}$

B = $\mathbb{N}$

Eindeutig ☒ Injektiv ☐

Eineindeutig ☐ Surjektiv ☒ Bijektiv ☐

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \wedge f(x) = |x|.$



A = $\mathbb{N}$

B = $\mathbb{N}$

Eindeutig ☒ Injektiv ☒

Eineindeutig ☒ Surjektiv ☒ Bijektiv ☒

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \wedge f(x) = |x|.$