Thema: Live-Meeting 04: Relationen

Was ist eine Relation?

In der Mathematik ist eine **Relation** eine Verbindung zwischen Elementen von zwei (oder mehr) Mengen. Einfach gesagt, eine Relation sagt, wie zwei Dinge zueinander in Beziehung stehen.

Und Relationen können Eigenschaften haben? Welche sind das?

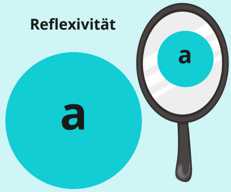
Äquivalenzrelation

Reflexivität

$$\bigwedge a \in A : (a,a) \in R$$

$a \; R \; a$

$a \sim a$



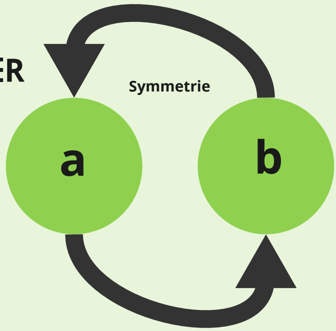
Reflexiv: Jedes Element steht zu sich selbst in Relation.

Symmetrie

$$\bigwedge a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

$a \; R \; b \Rightarrow b \; R \; a$

$a \sim b \Rightarrow b \sim a$



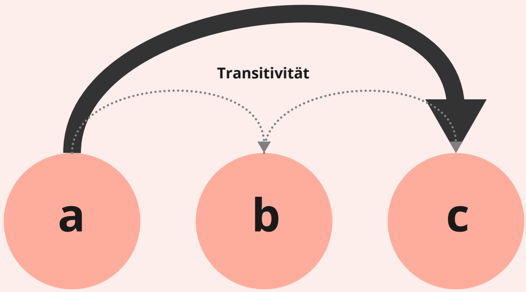
Symmetrisch: Wenn a zu b in Relation steht, dann steht auch b zu a in Relation.

Transitivität

$$\bigwedge a,b,c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

$a \; R \; b \wedge b \; R \; c \Rightarrow a \; R \; c$

$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$



Transitiv: Wenn a zu b und b zu c in Relation steht, dann steht auch a zu c in Relation.

Antisymmetrie (bzw. *Identitivität*)

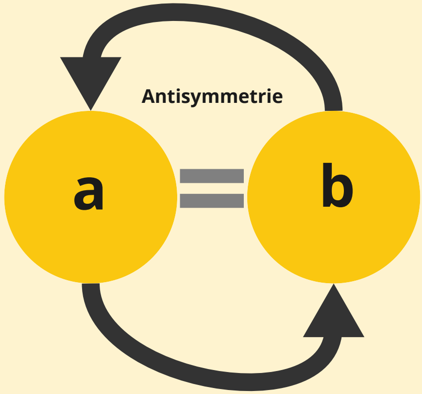
$$\bigwedge_{a,b \in A} : (a,b)\in R \wedge (b,a)\in R \Rightarrow a=b$$

$a \, R \, b \wedge b \, R \, a \Rightarrow a = b$

$a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow a = b$

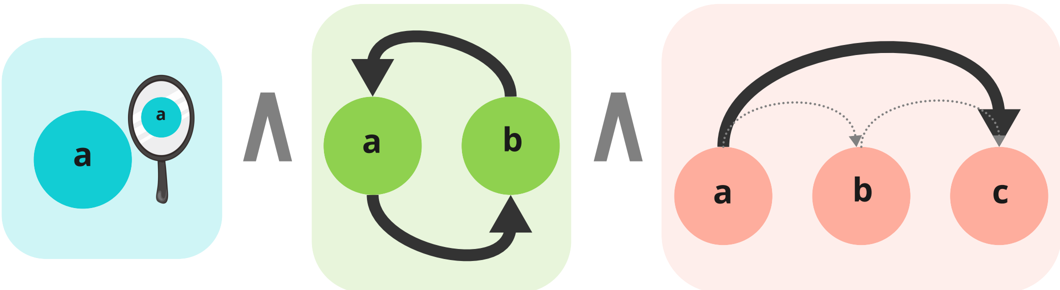
Antisymmetrisch: Dies bedeutet, dass wenn zwei Elemente in beide Richtungen in Relation stehen, **sie gleich sein müssen.**

In einfachen Worten:
Wenn a mit b in Relation steht und b mit a in Relation steht, dann muss a=b sein.



Äquivalenzrelation

Eine **Äquivalenzrelation** ist eine spezielle Art von Relation, die drei Eigenschaften hat: sie ist **reflexiv**, **symmetrisch** und **transitiv**.



Äquivalenzklasse

Eine **Äquivalenzklasse** in der Mathematik ist eine Gruppe von Elementen, die durch eine **Äquivalenzrelation** miteinander verbunden sind.

Aufgabe 1
Gegeben sei eine Relation R auf der Menge ℕ = {0,1,2,3,4,5,6,...} (der natürlichen Zahlen), definiert durch:

a R b :⇔ a • b = 24

Überprüfe, ob die Relation R folgende Eigenschaften hat:
1. Reflexivität
2. Symmetrie
3. Transitivität
4. Antisymmetrie

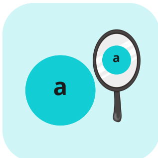
Lösung
1 R 24, denn 1 • 24 = 24 (1,24)
2 R 12, denn 2 • 12 = 24 (2,12)
3 R 8, denn 3 • 8 = 24
4 R 6, denn ...
6 R 4
8 R 3
12 R 2
24 R 1

Reflexiv (a R a) ?

Reflexivität

$$\bigwedge \mathbf{a \in A : (a,a) \in R}$$

a R a



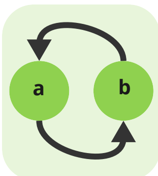
Nein!
Begründung: 1 ist ein Element von R. Aber es gilt nicht: 1 • 1 = 24

Symmetrisch (a R b ⇒ b R a) ?

Symmetrie

$$\bigwedge \mathbf{a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R}$$

a R b ⇒ b R a



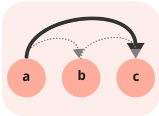
Ja!
Begründung: Es gilt stets: 1 • 24 = 24 • 1 = 24. Die Multiplikation ist kommutativ.

Transitiv (a R b ∧ b R c ⇒ a R c) ?

Transitivität

$\bigwedge$ **a,b,c ∈ A : (a,b)∈R ∧ (b,c)∈R ⇒ (a,c)∈R**

a R b ∧ b R c ⇒ a R c



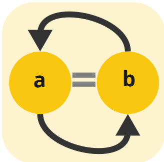
Nein!
Begründung: Es gilt 1 • 24 = 24 und es gilt 24 • 1 = 24. Aber es gilt nicht 1 • 1 = 24.

Antisymmetrie (a R b ∧ b R a ⇒ a = b) ?

Antisymmetrie

$\bigwedge$ **a,b ∈ A : (a,b)∈R ∧ (b,a)∈R ⇒ a=b**

a R b ∧ b R a ⇒ a = b



Nein!
Begründung:
Es gilt 1 • 24 = 24
und es gilt 24 • 1 = 24.
Aber es gilt nicht 1 = 24.

Aufgabe 2

Betrachte die Menge {1, 2, 3, 4} und die Relation R, definiert durch:

a R b :⇔ a ist ein Teiler von b

Überprüfe, ob die Relation R folgende Eigenschaften besitzt:

1. Reflexivität
2. Symmetrie
3. Transitivität
4. Antisymmetrie

Lösung

1 R 1, denn 1 durch 1 ist 1.
1 R 2, denn 2 durch 1 ist 2.
1 R 3, denn 3 durch 1 ist 3
1 R 4, denn 4 durch 1 ist 4.

2 R 2, denn 2 durch 2 ist 1.
2 R 4, denn 4 durch 2 ist 2.

3 R 3, denn 3 durch 3 ist 1.
4 R 4, denn 4 durch 4 ist 1.

Reflexiv (a R a) ?

Reflexivität

$$\bigwedge a \in A : (a,a) \in R$$

a R a

Ja!
Begründung:
Jede Zahl ist Teiler von sich selbst.

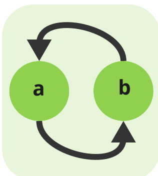
(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)

Symmetrisch (a R b ⇒ b R a) ?

Symmetrie

$$\bigwedge a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

a R b ⇒ b R a



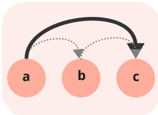
Nein!
Begründung:
Z.B. ist 1 ein Teiler von 2, aber 2 ist kein Teiler von 1.

Transitiv (a R b ∧ b R c ⇒ a R c) ?

Transitivität

$$\bigwedge_{a,b,c \in A} : (a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$$

a R b ∧ b R c ⇒ a R c



Ja!
Begründung: Genau dann wenn a|b und b|c, so ist auch a|c.

Beweis

Voraussetzung

$a|b \wedge b|c$ mit $a,b,c \in \mathbb{N}$

$\bigwedge_{a,b \in \mathbb{N}} : a|b :\Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{N}} : b = ak$

"Für alle a,b der natürlichen Zahlen gilt, a teilt b definitionsgemäß genau dann wenn es mindestens eine Zahl k der natürlichen Zahlen gibt, für die folgendes gilt: b ist das Produkt aus a und k, bzw. b ist ein k-faches von a."

$a|b \Rightarrow b = ak \quad (k \in \mathbb{N})$

Einfach gesagt: "Wenn a ein Teiler von b ist, genau dann ist b ein Vielfaches von a."

$b|c \Rightarrow c = bl \quad (l \in \mathbb{N})$

Behauptung

$a|c \Rightarrow c = am \quad (m \in \mathbb{N})$

$c = a \cdot (\ldots)$

Beweisführung

$b = ak$

$c = bl$

$c = a \cdot (k \cdot l)$

"**Substituieren**" heißt ersetzen.

Wir nennen die Klammer mit kl = m.

$\bigvee_{m \in \mathbb{N}} : m = k \cdot l$

$c = am$

$a|c$

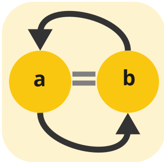
q.e.d.

Antisymmetrie (a R b ∧ b R a ⇒ a = b) ?

Antisymmetrie

$$\bigwedge_{a,b \in A} : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b$$

$a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b$



Ja!
Begründung:
Wenn a|b und b|a, so gilt stets auch a=b. Wir sehen das in den Tupeln: (1,1),(2,2),(3,3),(4,4)

Beweis

Voraussetzung

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow b = ak \\ b \mid a \Rightarrow a = bl \end{array}\right\} a,b,k,l \in \mathbb{N}$$

Behauptung

$$a = b$$

Beweisführung

$$b = ak$$
$$a = bl$$

"**Substituieren**" heißt ersetzen.

$$a = a \cdot k \cdot l$$

Okay moment, **a = a•k•l** ??? Für welche natürliche Zahl **k** und für welche natürliche Zahl **l** wäre das eine richtige Gleichung? Genau! Nur für **k = l = 1**.

$$a = a \cdot 1 \cdot 1 = a$$

Wenn **k = l = 1** ist, dann gilt das doch auch für die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} b = ak = a \cdot 1 = a \\ a = bl = b \cdot 1 = b \end{array}\right\} a = b$$

q.e.d.