Gibt es denn noch mehr spezielle Mengen, die ich wissen sollte?

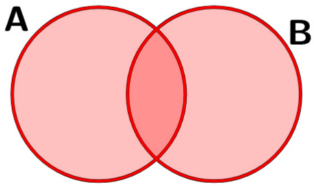
Klar! Hier ein paar Beispiele...

$B = \{2,3,4,5,6\}$
$C = \{1,2,3\}$

Vereinigungsmenge (Disjunktion ~ "ODER")

$\bigcup\{A,B\} := \{x : (x \in A) \lor (x \in B)\} =: A \cup B$

"Die Vereinigung von A und B enthält definitionsgemäß alle Elemente x, für die folgendes gilt: x ist ein Element von A **ODER** x ist ein Element von B."

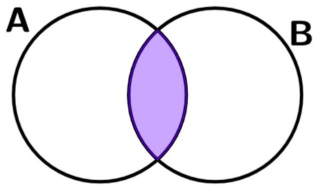


$B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$ Bei der Vereinigungsmenge kommt einfach "alles in den Topf".

Schnittmenge (Konjunktion ~ "UND")

$\bigcap\{A,B\} := \{x : (x \in A) \land (x \in B)\} =: A \cap B$

"Der Durchschnitt von A und B enthält definitionsgemäß alle Elemente x, für die folgendes gilt: x ist ein Element von A **UND** x ist ein Element von B."



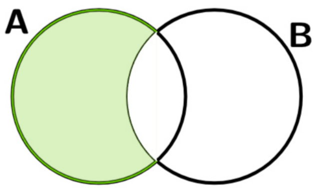
$B \cap C = \{2,3\}$ Die Schnittmenge enthält alle Elemente, die sowohl in B als auch in C enthalten sind.

Differenzmenge

$A \setminus B := \{x : (x \in A) \land (x \notin B)\}$

"Die Differenzmenge A ohne B enthält definitionsgemäß alle Elemente x, für die folgendes gilt: x ist ein Element aus A **UND** x ist kein Element aus B:"

A \ B



$B \setminus C = \{4,5,6\}$ Die Differenzmenge enthält alle Elemente einer Menge (Menge B), wobei man die Schnittmenge mit einer anderen Menge (Menge C) herausnimmt.

$C \setminus B = \{1\}$

Stopp, Stopp, Stopp!!! Alles schön und gut, aber was ich noch nicht verstanden habe: Was ist eine Teilmenge und was ist eine echte Teilmenge?

In der Mathematik gibt es zwei wichtige Begriffe: Teilmenge und echte Teilmenge. Beide beschreiben, wie eine Menge in Beziehung zu einer anderen Menge steht.

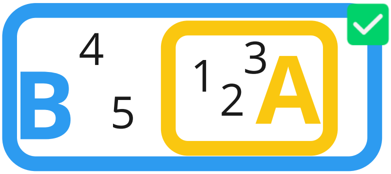
Teilmenge:

Eine Teilmenge ist eine Menge, deren **Elemente (alle)** auch in einer anderen Menge enthalten sind. Das heißt, wenn jede Zahl oder jedes Objekt in der kleineren Menge auch in der größeren Menge ist, dann ist die kleinere Menge eine Teilmenge.

Beispiel:

- **A = {1, 2, 3}**
- **B = {1, 2, 3, 4, 5}**

$A \subseteq B$



Hier ist A eine **Teilmenge** von B, weil **alle Elemente von A** (also 1, 2 und 3) auch in B sind. Auch wenn A und B genau gleich sind (z. B. A = {1, 2, 3} und B = {1, 2, 3}), ist A trotzdem eine Teilmenge von B.

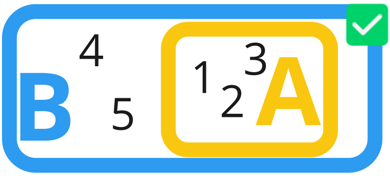
Echte Teilmenge:

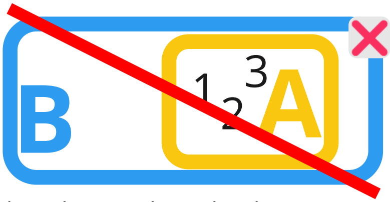
Eine **echte Teilmenge** ist fast das Gleiche, aber mit einem wichtigen Unterschied: Die kleinere Menge darf nicht genau gleich sein wie die größere Menge. Es muss mindestens ein Element in der größeren Menge sein, das nicht in der kleineren Menge enthalten ist.

Beispiel:

- **A = {1, 2, 3}**
- **B = {1, 2, 3, 4, 5}**

$A \subset B$





A ist eine **echte Teilmenge** von B, weil A weniger Elemente hat als B, und es gibt Elemente in B (4 und 5), die nicht in A sind.

Aber wenn A = {1, 2, 3} und B = {1, 2, 3}, dann wäre A **keine echte Teilmenge** von B, weil beide genau gleich sind.

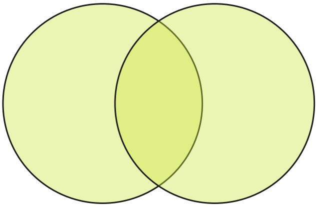
Zusammengefasst:

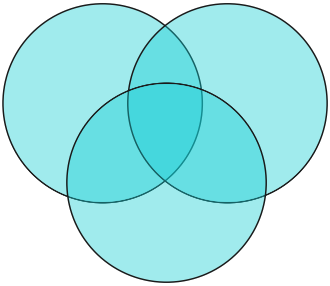
- **Teilmenge**: Alle Elemente der kleineren Menge sind auch in der größeren Menge (die beiden Mengen dürfen auch gleich groß sein).
- **Echte Teilmenge**: Alle Elemente der kleineren Menge sind in der größeren Menge, aber die kleinere Menge muss weniger Elemente haben (sie dürfen nicht gleich groß sein).

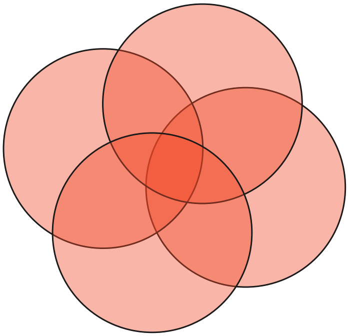
Venn-Diagramme

Definition

Ein **Venn-Diagramm** ist eine grafische Darstellung, die zeigt, wie verschiedene Mengen (Gruppen) von Objekten oder Zahlen miteinander in Beziehung stehen. Es besteht aus Kreisen, die sich teilweise überlappen. Jeder Kreis repräsentiert eine Menge. Die Überlappungen zwischen den Kreisen zeigen, welche Elemente die Gruppen gemeinsam haben.







Beispiel

Bestimmen Sie die Mengen A, B und C durch folgende Informationen und geben Sie die Mengen Elementweise an. Geben Sie die Menge A zusätzlich in einer erzeugenden Darstellung an.

$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A \setminus B = \{2,3,6\}$

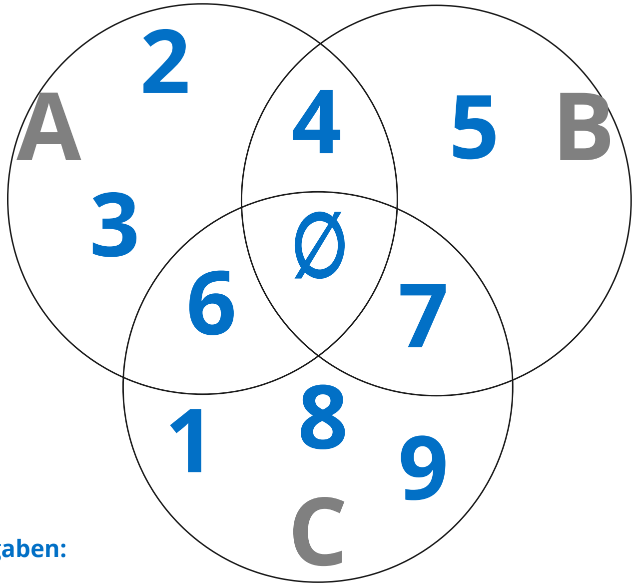
$A \setminus C = \{2,3,4\}$

$A \cap B \cap C = \{\}$

$C \setminus (A \cup B) = \{8,9,1\}$

$A \cap C = \{6\}$

$B \cap C = \{7\}$



Lösung der Aufgabe, Mengenangaben:

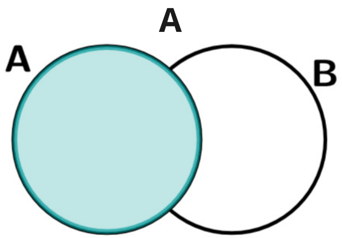
$A = \{2,3,4,6\} = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{5\} \quad \wedge \quad 1 < x < 7 \}$
$B = \{4,5,7\}$
$C = \{1,6,7,8,9\}$

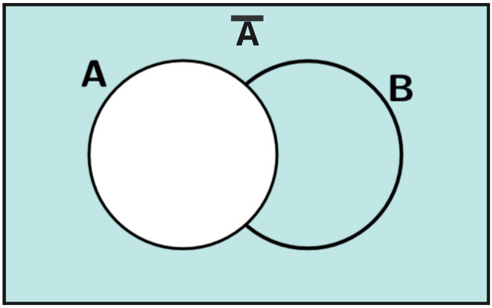
Gut, war das alles, oder gibt es noch weitere spezielle Mengen, die ich kennen muss?

Komplementmenge (absolutes Komplement)

Definition

Die Komplementmenge einer Menge A enthält alle Elemente, die einer Teilmenge (hier Menge A) fehlen, damit sie die gleichen Elemente besitzt wie die Grundmenge.





Was ist eine **Grundmenge**?
Stell dir vor, du hast eine Kiste mit Spielzeugautos. Wenn jemand fragt, welche Autos in der Kiste sind, dann sind alle Autos in der Kiste deine **Grundmenge**. Wenn du dann nur mit roten Autos spielen willst, wählst du aus der Grundmenge (der Kiste) nur die roten aus.

Beispiel

Grundmenge = $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$

Menge $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Komplementmenge $\overline{B} = \{0, 1, 7, 8, 9, \ldots\}$

Was bemerken wir? Die Vereinigung von der Menge B und ihrer Komplementmenge ergibt die Grundmenge.

$$B \cup \overline{B} = \mathbb{N}$$

Menge $D = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Komplementmenge $\overline{D} = \{\,\} = \emptyset$

Potenzmenge

Definition

Die **POTENZ**menge ist die Menge aller **POTENZ**iellen Teilmengen einer Menge, einschließlich der leeren Menge und sich selbst.

$$P(A) := \{U : U \subseteq A\}$$

"Die Potenzmenge der Menge A enthält definitionsgemäß alle Mengen U, für die folgendes gilt: U ist eine Teilmenge von A."

Menge $C = \{1,2,3\}$

Potenzmenge $P(C) = \{\underbrace{\emptyset}_{\text{Leere Menge}}, \underbrace{\{1\},\{2\},\{3\}}_{\text{Einer-Mengen}}, \underbrace{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}}_{\text{Zweier-Mengen}}, \underbrace{\{1,2,3\}=C}_{\text{Dreier-Mengen}}\}$

Mit folgender Gleichung kann man die Anzahl der Teilmengen in der Potenzmenge bestimmen:

$|P(C)| = 2^{|C|} = 2^3 = 8$ Die Potenzmenge P(C) der Menge C enthält genau 8 Elemente.

Diese Striche bedeuten, dass wir die **Mächtigkeit oder Kardinalität** einer Menge benutzen. Das bedeutet nichts anderes als die Anzahl der Elemente innerhalb der Menge.

Kartesisches Produkt oder auch Kreuzprodukt

Definition

Das kartesische Produkt zweier Mengen ist die Menge aller geordneten Paaren (Tupel ~ (x,y)) von Elementen der beiden Mengen, wobei die erste Komponente ein Element der ersten Menge und die zweite Komponente ein Element der zweiten Menge ist.

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

"Das Kreuzprodukt von A und B enthält definitionsgemäß alle Tupel (a,b), für die folgendes gelten muss: a muss ein Element aus der Menge A sein, und b muss ein Element aus der Menge B sein."

Mengen

$B = \{2,3,4,5,6\}$

$C = \{1,2,3\}$

$E = B \setminus \{2,6\} = \{3,4,5\}$

E \ C	1	2	3
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)

Kreuzprodukt $C \times E = \{1,2,3\} \times \{3,4,5\}$

$= \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\}$