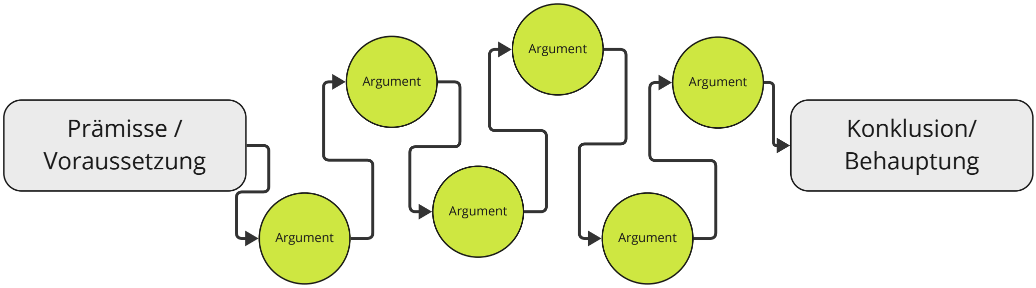
Thema: Live-Meeting 02: Beweise

Datum: 21.09.2024
Seite: 1

Was ist ein Beweis überhaupt?

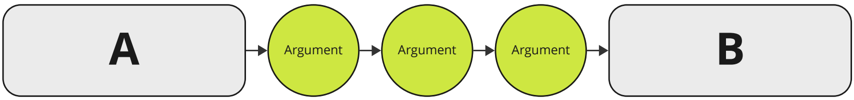
Ein Beweis ist in der Mathematik die als fehlerfrei anerkannte Herleitung der **Richtigkeit** bzw. der **Unrichtigkeit** einer Aussage.



Und wie mache ich das genau? Welche Methoden gibt es?

Direkter Beweis

Für einen direkten Beweis (direkter Schluss) nimmt man einen bereits als richtig bewiesenen Satz (Prämisse) und leitet, durch logische Schlussfolgerungen, daraus den zu beweisenden Satz (Konklusion) ab. Er beweist eine Aussage der Form A⇒B indem man A annimmt und von dort aus auf B schließt.



Beispiel

"Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl ist stets gerade."

Voraussetzung

$n \in G \Rightarrow n = 2x$ mit $x \in \mathbb{N}$

$m \in U \Rightarrow m = 2y + 1$ mit $y \in \mathbb{N}$

Gerade nat. Zahl
$2n$
$(n \in \mathbb{N})$

Ungerade nat. Zahl
$2n+1$
$(n \in \mathbb{N})$

Auf das "**Ziel**" der Behauptung immer ein Auge behalten.

Behauptung $(n \cdot m) \in G$ [ist äquivalent zu $2k$ mit $k \in \mathbb{N}$]

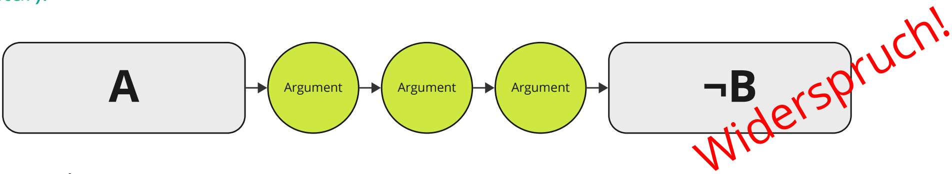
Beweisführung

$$n \cdot m = 2x \cdot (2y + 1) = 4xy + 2x = 2 \cdot (2xy + x) =$$
$$= 2 \cdot (2xy + x)$$
$$\bigvee k \in \mathbb{N} : k = 2xy + x$$
$$n \cdot m = 2 \cdot k$$
$$2k \in G \quad \text{q.e.d.}$$

„quod erat demonstrandum“ („was zu beweisen war“)

Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis)

Bei einem indirekten Beweis (Reductio ad absurdum, Widerspruchsbeweis) zeigt man, dass ein Widerspruch entsteht, wenn die zu beweisende Behauptung falsch wäre. Dazu nimmt man an, dass die Behauptung falsch ist, und wendet dann die gleichen Methoden wie beim direkten Beweis an. Wenn daraus ein Widerspruch entsteht, dann kann die Behauptung nicht falsch sein, also muss sie richtig sein (Satz vom ausgeschlossenen Dritten = Tertium non Datur).



Beispiel

"Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar."
Widerspruchsbeweis: "Nehmen wir an, die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist **NICHT** durch 3 teilbar."

Voraussetzung	$n \wedge (n+1) \wedge (n+2)$	mit $n \in \mathbb{N}$
Behauptung	$n + (n+1) + (n+2)$	ist nicht durch 3 teilbar.
Beweisführung mittels Widerspruch	$n + (n+1) + (n+2)$	ist nicht durch 3 teilbar.
	$3n + 3$	ist nicht durch 3 teilbar.
	$3 \cdot (n+1)$	ist nicht durch 3 teilbar.
	$(n+1)$	ist keine natürliche Zahl.
	$(n+1) - 1$	ist keine natürliche Zahl.
	n	ist keine natürliche Zahl.

Widerspruch!, denn laut Voraussetzung ist n eine natürliche Zahl. Demnach muss die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen durch 3 teilbar sein.

Indirekter Beweis (Kontraposition)

Unter **Kontraposition** versteht man in der Logik den Umkehrschluss einer Implikation, d. h. den Schluss von „Wenn A, dann B" auf „Wenn nicht B, dann nicht A".

A → Argument → Argument → Argument → **B**

$$\Leftrightarrow$$

¬B → Argument → Argument → Argument → **¬A**

⇔ ~ **Äquivalent** bedeutet "gleichwertig" oder "entspricht".

Beispiel

"Wenn das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n gerade ist, so ist auch die natürliche Zahl n stets gerade."

Ursprüngliche Implikation	A	$\Rightarrow$	B
	$n^2 \in G$	$\Rightarrow$	$n \in G$
Kontraposition (Negation und Konversion)	$\neg B$	$\Rightarrow$	$\neg A$
	$\neg(n \in G)$	$\Rightarrow$	$\neg(n^2 \in G)$
	$n \in U$	$\Rightarrow$	$n^2 \in U$

Negation ~ "Verneinung"
Konversion ~ "Vertauschung"

"Wenn eine natürliche Zahl n ungerade ist, so ist auch das Quadrat n^2 stets ungerade."

Voraussetzung $n \in U$ bzw. $2m+1$ mit $m \in \mathbb{N}$

Behauptung $n^2 \in U$ [ist äquivalent zu $2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$]

Beweisführung $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2 \cdot (2m^2 + 2m) + 1$

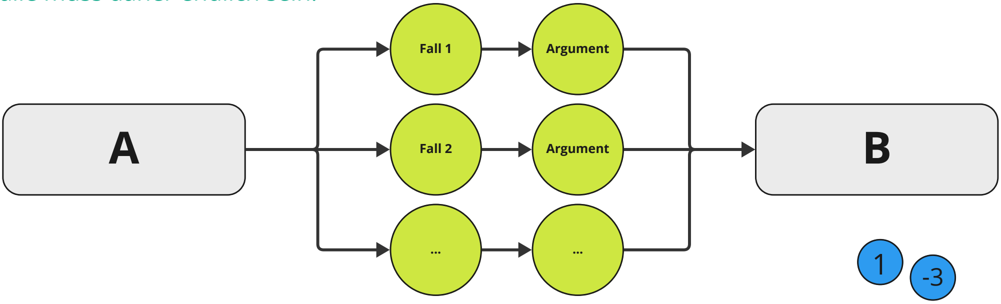
$V k \in \mathbb{N} : k = 2m^2 + 2m$

$n^2 = 2k + 1$

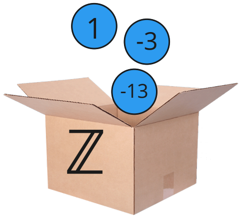
$n^2 \in U$ q.e.d.

Vollständige Fallunterscheidung

Bei einem Beweis durch vollständige Fallunterscheidung (engl. proof by exhaustion „durch Ausschöpfung“) wird jeder der möglichen Fälle einzeln betrachtet. Die Zahl der möglichen Fälle muss daher endlich sein.



Alle **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ könnte man z.B. in folgende Häufchen aufteilen...



$z < 0$
z ist negativ

$z = 0$
z ist Null

$z > 0$
z ist positiv

Beispiel

"Für alle Zahlen $z \in \mathbb{Z}^*$ gilt: Das Quadrat z^2 ist positiv."

Fall 1: $z < 0$

$z = -n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$

$z^2 = (-n)^2 = (-n) \cdot (-n) = n^2$

Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist stets natürlich und positiv.

Fall 2: $z > 0$

$z = n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$

$z^2 = n^2 = n \cdot n = n^2$

Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist stets natürlich und positiv.

Da die ganze Zahl z nur positiv oder negativ sein kann, gibt es auch keine weiteren Fälle. Indem man jeden Fall einzeln analysiert, kann eine vollständige Lösung für das Problem gefunden werden.

Gegenbeispiel

Um eine **universal quantorierte** Aussage zu wiederlegen, genügt es ein zulässiges Beispiel anzugeben, welches die Aussage nicht erfüllt.

> **Universal quantoriert** ~ "Universal quantoriert" bedeutet, dass etwas für alle Fälle gilt. Wenn etwas universal quantoriert ist, sagen wir damit, dass es für jede mögliche Situation oder jedes Element in einer bestimmten Gruppe zutrifft. Ein Beispiel: "Für alle Menschen gilt, dass sie atmen." Das "für alle" ist der Universalquantor / Allquantor.

Beispiel

Behauptung: "Alle Primzahlen sind ungerade."

Gegenbeispiel: "Die Zahl 2 ist eine Primzahl, und sie ist gerade."