Thema: Live-Meeting 01: Mengenlehre

Datum: 14.09.2024
Seite: 1

Was ist eine Menge oder was sind Mengen überhaupt?

Definition
Als Menge wird in der Mathematik ein **abstraktes Objekt** bezeichnet, das aus der Zusammenfassung einer Anzahl einzelner Objekte hervorgeht. Diese werden dann als die **Elemente** der Menge bezeichnet. Die Menge ist eines der wichtigsten und grundlegendsten Konzepte der Mathematik; mit ihrer Betrachtung beschäftigt sich die Mengenlehre.

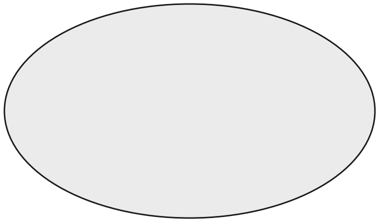
Beispiele für Mengen

$A = \{1, 3, 5, 6, x, \text{Blau}\}$

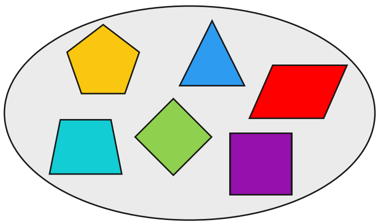
$B = \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, \dots, 6\}$

$C = \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$

$D = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$



Darstellung einer leeren Menge



Darstellung einer Menge mit Vielecken

Eigenschaften von Mengen

- Es ist egal, wie häufig ein Element innerhalb einer Menge vorkommt. Entscheidend ist nur, kommt es in der Menge vor, oder kommt es nicht vor.

$C = \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \boxed{\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}}$

$1 \in D$

$-3 \notin D$

- Die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Menge ist ebenfalls egal.

$C = \boxed{\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$

- Darüber hinaus können Mengen endlich oder unendlich sein.

$C = \{1, 2, 3\}$ Menge C besitzt eine endliche Anzahl an Elementen; sie ist endlich.

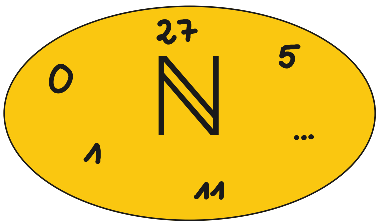
$D = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge D besitzt eine unendliche Anzahl an Elementen; sie ist unendlich.

Die Menge D kommt mir aber sehr bekannt vor...

$D = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

Die Menge der natürlichen Zahlen umfasst alle **"zählbaren" Zahlen** ab. Aus der **Addition und Multiplikation** von nat. Zahlen gehen stets nat. Zahlen hervor.



Was heißt denn bitte elementweise und erzeugende Darstellung?

Gebe die folgenden Mengen elementweise und erzeugend an:

Die Menge A, die ein Vielfaches von 4 ist und kleiner als 21.

Elementweise Darstellung $A = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$

Erzeugende Darstellung $A = \{n \in \mathbb{N} : 4 \mid n \wedge n < 21\}$

Und was heißt Teilermenge und Vielfachmenge?

Teilermengen

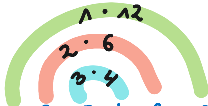
Definition

Die Teilermenge einer natürlichen Zahl n ist die Menge aller Teiler dieser Zahl. Sie besteht also aus allen natürlichen Zahlen, durch die man die Ausgangszahl n ohne Rest teilen kann, und wird oft mit Tn oder T(n) bezeichnet.

$T(n) = \{t \in \mathbb{N}^* : t \mid n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

"Die Teilermenge von n enthält alle natürlichen Zahlen t, die darüber hinaus Teiler von n sind."

Natürliche Zahl $n = 12$



Teilermenge von n $T(n) = T(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Vielfachmengen

Die **Vielfachenmenge** ist in der Mathematik die Menge aller Vielfachen einer natürlichen Zahl. Sie besteht aus allen natürlichen Zahlen, die durch die Ausgangszahl ohne Rest teilbar sind.

$V(n) = \{v \in \mathbb{N} : n \mid v\}$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$

"Die Vielfachmenge von n enthält alle natürlichen Zahlen, für die gilt: n ist ein Teiler von v."

Natürliche Zahl $n = 3$

Teilermenge von n $V(n) = V(3) = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$

Teilerdefinition

$\bigwedge a, b \in \mathbb{N} : a \mid b :\Leftrightarrow \bigvee n \in \mathbb{N} : b = a \cdot n$

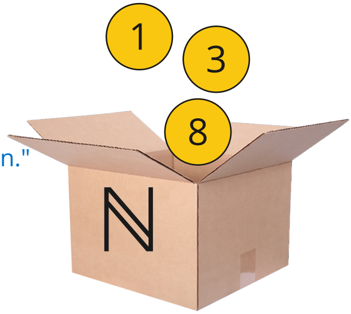
"Für alle a,b der natürlichen Zahlen gilt, a teilt b definitionsgemäß genau dann wenn es mindestens eine Zahl n der natürlichen Zahlen gibt, für die folgendes gilt: b ist das Produkt aus a und n, bzw. b ist ein n-faches von a."

Einfach gesagt: "Wenn a ein Teiler von b ist, genau dann ist b ein Vielfaches von a."

$3 \mid 12 :\Leftrightarrow 12 = 3 \cdot 4$

Gebe die folgenden Mengen elementweise an:

a) $A = \{n \in \mathbb{N}: 7|n\}$
b) $B = \{n \in \mathbb{N}: n|36\}$
c) $C = \{n \in \mathbb{N}: 8|n \wedge n<35\}$
d) D = "Alle nat. Zahlen, die beim Teilen durch 5 den Rest 2 lassen."
e) $E = \{x \in \mathbb{Z}: |x+2| > 6\}$



a) $n \in \mathbb{N}$: $7|n$

$\frac{1}{7}$

$A = \{0, 7, 14, 21, \dots\} = V(7)$ "Vielfachmenge von 7, also V(7)"

Die Menge A ist **unendlich**.

b) $n \in \mathbb{N}$: $n|36$

$\frac{36}{1}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} = T(36)$ "Teilermenge von 36, also T(36)"

Die Menge B ist **unendlich**.

c) $n \in \mathbb{N}$: $8|n$ $\wedge$ $n<35$

$\frac{0}{8}$ 0 **< 35**

$C = \{0, 8, 16, 24, 32\}$

Die Menge C ist **endlich**.

d) D = "Alle nat. Zahlen, die beim Teilen durch 5 den Rest 2 lassen."

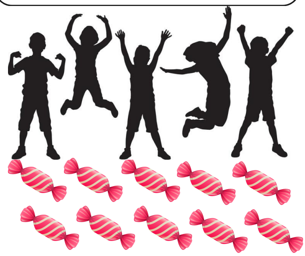
$n \in \mathbb{N}$: $n = 5k+2$ mit $k \in \mathbb{N}$

n

k

$n = 5 \cdot \boxed{0} + 2$

+2



$k \cdot \begin{cases} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{cases}$

$\vdots$

$D = \{2, 7, 12, 17, \dots\}$

Die Menge D ist **unendlich**.

e) $x \in \mathbb{Z}$: $|x+2| > 6$

1. Was ist dieses $\mathbb{Z}$?
2. Und was bedeuten denn überhaupt diese Striche da?

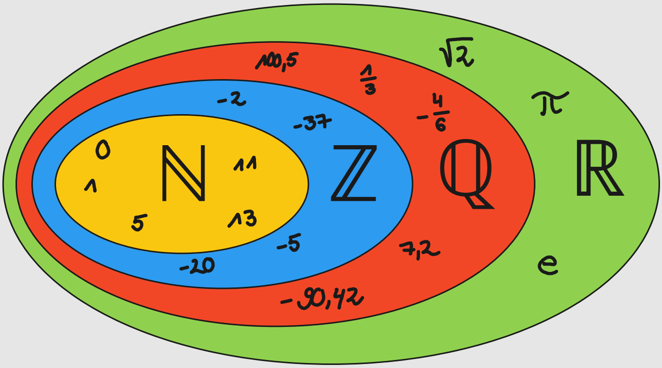
1.

$\mathbb{N}$ ~ **Natürlichen Zahlen**

$\mathbb{Z}$ ~ **Ganzen Zahlen**

$\mathbb{Q}$ ~ **Rationalen Zahlen**

$\mathbb{R}$ ~ **Reellen Zahlen**



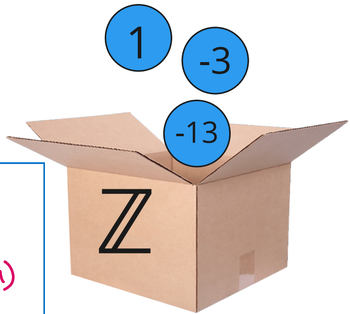
2.

Betragsstriche: $|x| = |-x| = x$

$|2| = |-2| = 2$

$x \in \mathbb{Z}$: $|x+2| > 6$

$+(x+2) > 6$	$-(x+2) > 6$
$x+2 > 6 \quad \vert -2$	$-x-2 > 6 \quad \vert +2$
$x > 4$	$-x > 8 \quad \vert \cdot (-1)$
	$x < -8$



$E = \{\ldots, -11, -10, -9, 5, 6, 7, \ldots\}$

Die Menge E ist **unendlich**.