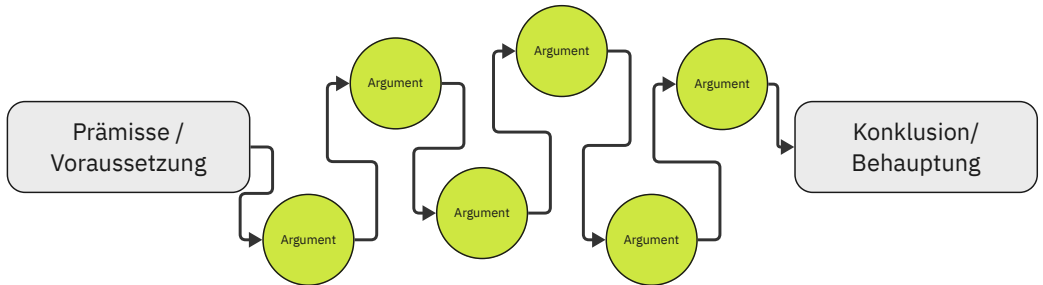


Was ist ein Beweis überhaupt?

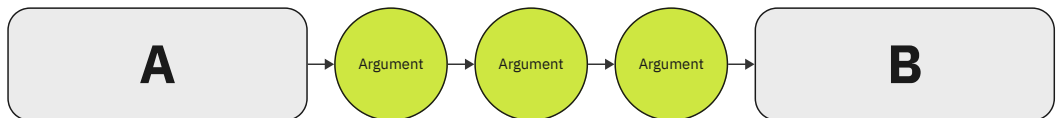
Ein Beweis ist in der Mathematik die als fehlerfrei anerkannte Herleitung der **Richtigkeit** bzw. der **Unrichtigkeit** einer Aussage.



Und wie mache ich das genau? Welche Methoden gibt es?

Direkter Beweis

Für einen direkten Beweis (direkter Schluss) nimmt man einen bereits als richtig bewiesenen Satz (Prämisse) und leitet, durch logische Schlussfolgerungen, daraus den zu beweisenden Satz (Konklusion) ab. Er beweist eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ ($\Rightarrow$ bedeutet Implikation bzw. "Wenn ..., Dann ...") indem man A annimmt und von dort aus auf B schließt.



Beispiel eines direkten Beweises / formalen Beweises

"Das Produkt einer geraden und einer ungeraden natürlichen Zahl ist stets gerade."

Voraussetzung "Eine gerade und eine ungerade natürliche Zahl sei gegeben"

$$n \in \mathbb{N} \text{ ist gerade} : \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : n = 2k$$

$$\{0, 1, 2, \dots\}$$

Gerade nat. Zahl
 $2k$
($k \in \mathbb{N}$)

$$m \in \mathbb{N} \text{ ist ungerade} : \Leftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{N} : m = 2\ell + 1$$

Ungerade nat. Zahl
 $2k+1$
($k \in \mathbb{N}$)

Behauptung "Das Produkt dieser beiden Zahlen n und m ist stets gerade"

$$n \cdot m \text{ ist gerade} \quad \text{👀👀}$$

Auf das "Ziel" der Behauptung immer ein Auge behalten.

Beweisführung $n \cdot m$

$$(2k) \cdot (2\ell + 1)$$

Substitution

$$4k\ell + 2k$$

Wir klammern nun die 2 aus

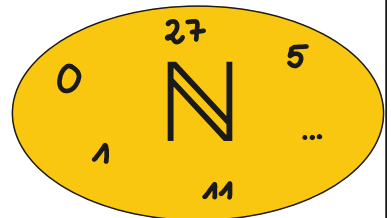
$$2 \cdot \left(\frac{4k\ell}{2} + \frac{2k}{2} \right)$$

$$2 \cdot (2k\ell + k)$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Die Menge der natürlichen Zahlen umfasst alle "zählbaren" Zahlen ab. Aus der **Addition und Multiplikation** von nat. Zahlen gehen stets nat. Zahlen hervor.



$$\forall x \in \mathbb{N} : x = 2k\ell + k$$

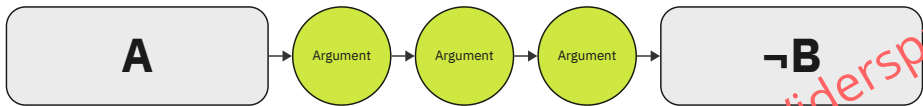
$$n \cdot m = 2x$$



■
Q.E.D.
„quod erat demonstrandum.“
„Was zu beweisen war.“
„W.z.b.w.“

Indirekter Beweis (Widerspruchsbeweis)

Bei einem indirekten Beweis (Reductio ad absurdum, Widerspruchsbeweis) zeigt man, dass ein Widerspruch entsteht, wenn die zu beweisende Behauptung falsch wäre. Dazu nimmt man an, dass die Behauptung falsch ist, und wendet dann die gleichen Methoden wie beim direkten Beweis an. Wenn daraus ein Widerspruch entsteht, dann kann die Behauptung nicht falsch sein, also muss sie richtig sein (Satz vom ausgeschlossenen Dritten = Tertium non Datur).



Beispiel eines Widerspruchsbeweises

"Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar."

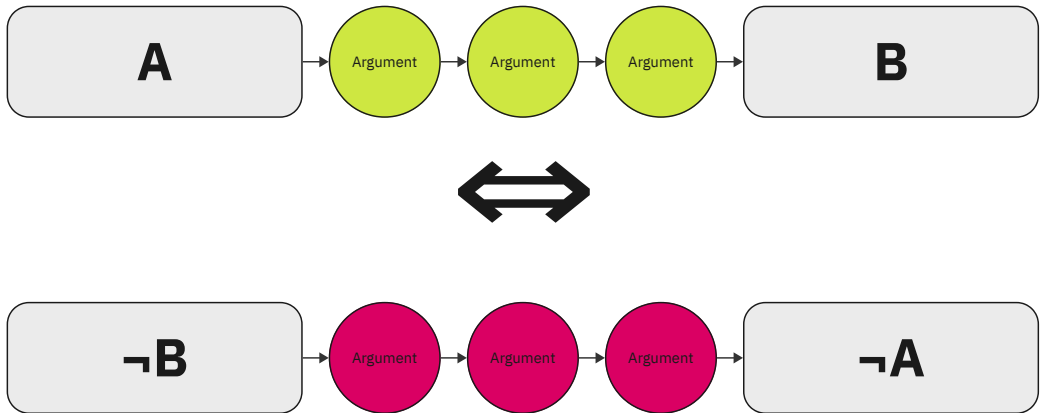
Widerspruchsbeweis: "**Nehmen wir doch einfach mal an**, die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist **NICHT** durch 3 teilbar."

Voraussetzung	n 4	^{„und“} $\wedge$	$(n+1)$ 4+1=5	$\wedge$	$(n+2)$ 4+2=6	mit $n \in \mathbb{N}$
Behauptung	$n + (n+1) + (n+2)$					ist nicht durch 3 teilbar
Beweisführung	$n + (n+1) + (n+2)$					ist nicht durch 3 teilbar
mittels	$n + n+1 + n+2$					Assoziativgesetz
Widerspruch	$3n + 3$					ist nicht durch 3 teilbar
	$3 \cdot (n + 1)$					Distributivgesetz
	$3 \cdot (n + 1)$					ist nicht durch 3 teilbar
	$(n + 1)$					ist keine natürliche Zahl
	$n + 1 - 1$					ist keine natürliche Zahl
	n					ist keine natürliche Zahl

Widerspruch!, denn laut Voraussetzung ist n eine natürliche Zahl. Demnach muss die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen durch 3 teilbar sein.

Indirekter Beweis (Kontraposition)

Unter **Kontraposition** versteht man in der Logik den Umkehrschluss einer Implikation, d. h. den Schluss von „Wenn A, dann B“ auf „Wenn nicht B, dann nicht A“.



Beispiel mit dem Regen:

"Wenn es regnet, dann ist die Straße nass."

"Wenn die Straße nicht nass ist, dann hat es auch nicht geregnet ... **DENN wenn es geregnet hätte, dann wäre die Straße ja nass!**"

Beispiel eines Beweises mittels Kontraposition

"Wenn das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n gerade ist, dann ist auch die natürliche Zahl n stets gerade."

Ursprüngliche Implikation

$$A \Rightarrow B$$

$$n^2 \text{ ist gerade} \Rightarrow n \text{ ist gerade}$$

Kontraposition
(Negation und Konversion)

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

Negation ~ "Verneinung"
Konversion ~ "Vertauschung"

$$n \text{ ist nicht gerade} \Rightarrow n^2 \text{ ist nicht gerade}$$

$$n \text{ ist ungerade} \Rightarrow n^2 \text{ ist ungerade}$$

"Wenn eine natürliche Zahl n ungerade ist, so ist auch das Quadrat n^2 stets ungerade."

Voraussetzung $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade $:\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1$
 $\{0, 1, 2, \dots\}$

Behauptung n^2 ist ungerade 

Beweisführung n^2 Substitution

$$(2k+1)^2 \quad \text{1te Binomische Formel}$$

$$4k^2 + 4k + 1$$

$$2 \cdot \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \quad \text{Distributivgesetz}$$

$$\forall l \in \mathbb{N} : l = 2k^2 + 2k$$

$$2l + 1 \text{ ist ungerade}$$

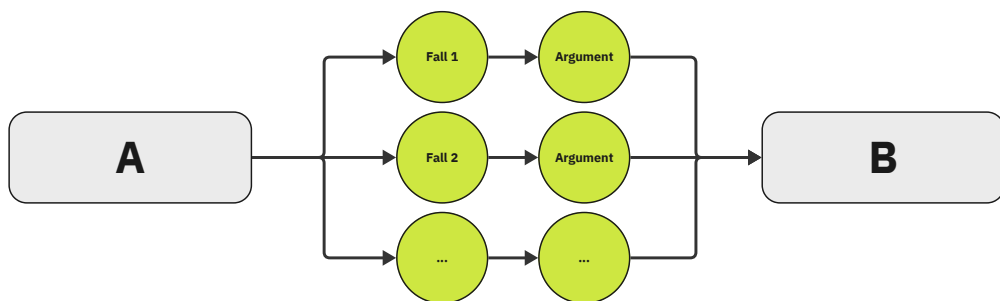


$$(a+b)^2 \\ a^2 + 2ab + b^2$$

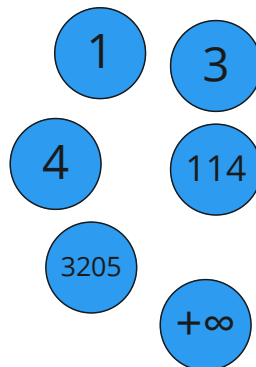
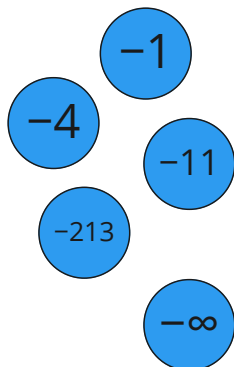
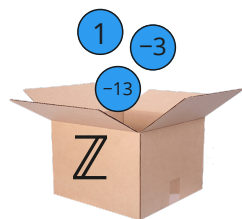
Da die Kontraposition wahr ist, so ist auch die ursprüngliche Implikation wahr!

Vollständige Fallunterscheidung

Bei einem Beweis durch vollständige Fallunterscheidung (engl. proof by exhaustion „durch Ausschöpfung“) wird jeder der möglichen Fälle einzeln betrachtet. Die Zahl der möglichen Fälle muss daher endlich sein.



Alle **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ könnte man z.B. in folgende Häufchen aufteilen...



Beispiel einer vollständigen Fallunterscheidung

"Für alle Zahlen $z \in \mathbb{Z}^*$ gilt: Das Quadrat z^2 ist stets positiv."

Fall 1: $z < 0$ $z = -n$ $n \in \mathbb{N}^*$

$$z^2$$

$$(-n)^2$$

$$(-n) \cdot (-n)$$

$$n^2$$

Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist stets natürlich und positiv.



Fall 2: $z > 0$ $z = n$ $n \in \mathbb{N}^*$

$$z^2$$

$$n^2$$

Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist stets natürlich und positiv.



Da die ganze Zahl z nur positiv oder negativ sein kann, gibt es auch keine weiteren Fälle. Indem man jeden Fall einzeln analysiert, kann eine vollständige Lösung für das Problem gefunden werden.

Gegenbeispiel

Um eine **universal quantorierte** Aussage zu widerlegen, genügt es **ein** zulässiges Beispiel anzugeben, welches die Aussage nicht erfüllt.

Universal quantoriert ~ "Universal quantoriert" bedeutet, dass etwas für alle Fälle gilt. Wenn etwas universal quantoriert ist, sagen wir damit, dass es für jede mögliche Situation oder jedes Element in einer bestimmten Gruppe zutrifft. Ein Beispiel: "Für alle Menschen gilt, dass sie atmen." Das "für alle" ist der Universalquantor / Allquantor.

Beispiel einer Widerlegung mittels Gegenbeispiels

Behauptung: "Alle Primzahlen sind ungerade."

Gegenbeispiel: "Die Zahl 2 ist eine Primzahl, und sie ist gerade."

